Ejercicio 1:

a)

Θ es simetrica: si f ∈ Θ(g) entonces g ∈ Θ(f ) .

f ∈ Θ( g )

= <por definición>

∃c1 > 0 · ∃c2 > 0 · ∃n0 · ∀n > n0 · c1 g(n) ≤ f (n) ≤ c2 g(n)

=<idempotencia de ^>

∃c1 > 0 · ∃c2 > 0 · ∃n0 · ∀n > n0 · c1 g(n) ≤ f (n) ^ f (n) ≤ c2 g(n)

 <aritmetica>

∃c1 > 0 · ∃c2 > 0 · ∃n0 · ∀n > n0 · g(n) ≤ f (n) /c1 ^ f (n) / c2 ≤ g(n)

= <comutatividad de ^ e idempotencia de ^>

∃c1 > 0 · ∃c2 > 0 · ∃n0 · ∀n > n0 · f (n) / c2 ≤ g(n) ≤ f (n) / c1

= <sustitución>

∃s1 = 1/c2 > 0· ∃s2 = 1/c1 > 0 · ∃n0 · ∀n > n0 · s1f (n) ≤ g(n) ≤ s2f (n)

=<por definición>

g ∈ Θ( f )

b)

O es transitiva: si f ∈ O(g) y g ∈ O(h) entonces f ∈ O(h).

f ∈ O(g) ^ g ∈ O(h)

=<por definición>

∃c > 0 · ∃n0 · ∀n > n0 · f (n) ≤ cg(n) ^ ∃s > 0 · ∃n0 · ∀n > n0 · g (n) ≤ sh(n)

<aritmetica multiplico por c >

∃c > 0 · ∃n0 · ∀n > n0 · f (n) ≤ cg(n) ^ ∃s > 0 · ∃n0 · ∀n > n0 · cg (n) ≤ csh(n)

=<idempotencia de ^>

∃s > 0 · c > 0 · ∃n0 · ∀n > n0 · f (n) ≤ cg (n) ≤ csh(n)

<trancitividad de desigualdad>

∃s > 0 · c > 0 · ∃n0 · ∀n > n0 · f (n) ≤ csh(n)

=<sustitución w = cs >

∃w > 0 · ∃n0 · ∀n > n0 · f (n) ≤ wh(n)

=<por definición>

f ∈ O(h)

c)

Si f ∈ O(g) entonces kf ∈ O(g) con k > 0 .

f ∈ O(g)

=<por definición>

∃c > 0 · ∃n0 · ∀n > n0 · f (n) ≤ cg(n)

<aritmetica>

∃c > 0 · ∃n0 · ∀n > n0 · kf (n) ≤ kcg(n) , k >0

=<sustitución h = kc >

∃h > 0 · ∃n0 · ∀n > n0 · kf (n) ≤ hg(n) , k >0

=<por definicion>

kf ∈ O(g) con k > 0

Ejercicio 2

Dom Θ = { N a la N }

Cod Θ = [0, +00)

Ejercicio 3

f ∈ Ω ( g ) se define formalmete como:

∃c > 0 · ∃n0 · ∀n > n0 · cg(n) ≤ f (n)

Ω es transitiva: si f ∈ Ω(g) y g ∈ Ω(h) entonces f ∈ Ω(h).

f ∈ Ω(g) y g ∈ Ω(h)

=<por definicion>

∃c > 0 · ∃n0 · ∀n > n0 · cg(n) ≤ f(n) y ∃a > 0 · ∃n0 · ∀n > n0 · ah(n) ≤ g(n)

=<Aritmetica multiplicamos por c la segunda exprecion>

∃c > 0 · ∃n0 · ∀n > n0 · cg(n) ≤ f(n) y ∃a > 0 · ∃n0 · ∀n > n0 · cah(n) ≤ cg(n)

=<Comutatividad de ^ e idempotencia de ^>

∃c > 0 · ∃a > 0 · ∃n0 · ∀n > n0 · cah(n) ≤ cg(n) ≤ f (n)

<Transitividad de la desigualdad>

∃c > 0 · ∃a > 0 · ∃n0 · ∀n > n0 · cah(n) ≤ f (n)

=<Sustitucion w = ca>

∃w · ∃n0 · ∀n > n0 · wh(n) ≤ f (n)

=<Sustitucion w = ca>

f ∈ Ω ( h )

Ejercicio 4

a)

T(n) = 2T(n/2) + 5

caso 1

a = 2, b = 2, f(n) = 5, entonces

f(n) = Θ (1), donde c = 0 < log en base 2 de 2 = 1

<Por el teorema maestro>

T ∈ Θ(n a la log en base 2 de 2 ) = Θ(n)

b)

U(n) = 2U(n/2) + n + 2

caso 2

a = 2, b = 2, f(n) = n + 2, entonces

f(n) = Θ (n ala c log ala k de n), donde c = log en base 2 de 2 = 1 y k = 0

osea f(n) = Θ (n)

<Por el teorema maestro>

T ∈ Θ(n a la c log a la k+1 de n) = Θ(n log n)

c)

V(n) = 3V(n/2) + n a la 2 + 435n

caso 3

a = 3 , b = 2, f(n) = n a la 2 + 435n, entonces

f(n) = Θ(n a la 2 + 435n) = Θ(n a la 2)

c = 2 > log en base 2 de 3 es igual aproximadamente a 1,6

<Por el teorema maestro>

T ∈ Θ(n a la 2)

5)

La complejidad del algoritmo de burbuja, como pero caso es:

O(n^2)

como mejor caso:

Ω(n)

La complejidad del algoritmo de selección, como pero caso es:

O(n^2)

como mejor caso:

Ω(n^2)

La complejidad del algoritmo de inserción, como peor caso es:

O(n^2)

como mejor caso:

Ω(n)

6)

a)

mejor caso Ω(1)

peor caso O(n)

b) Θ(1)

c) Θ(n)

d) Θ(1)

e) Θ(n)

f) Θ(n)

7)

i) Θ(n)

ii) Θ(n)

iii) Θ(n)

iv) Θ(n^3)

v)

mejor caso Ω(1)

peor caso O(n)

vi)

Analisis:

mejor caso:

Clo(k) = 2 si k no es multiplo de b. Clo ∈ Ω(1).

Peor caso:

Como b tiene que ser multiplo de i, b se repite n veses.

Osea la ecuacion es:

Clo(b^n) = 2 + 1 + Clo(b^(n-1))

=<aritmetica>

Clo(b^n) = Clo(n/b) + 3, donde n = b^k para algun n←(sospecho que n es k)

caso 2 del teorema maestro:

a = 1, b = b, f(n) = 3 tenemos que

f ∈ Θ(1) y logb(1) = 0 ya que b^0 = 1 (definicion de logaritmo) con lo que tenemos que c = 0 y k = 0.

<Por el teorema maestro>

Clo ∈ Θ(n^0 log^(0+1) n) = Clo Θ(log (n)).

vii)

Mejor caso:

Cbin(0) = Ω(1)

Cbin(1) = Ω(1)

Peor caso:

E: Cbin (n) = Cbin(n/2) + k, k constante y n > 1

F(n) = k, Cf(n) = Θ(1)

a = 1, b = 2, por Cf c = 0 que es igual al log base 2 de 1, por el teorema

Maestro del caso 2 y para k = 0 entonces Cbin ∈Θ(log n)

Al pareces la ecuacion esta mal... Lo que sigue

E: Cbin (n) = Cbin(n/2) + Cbin(n/2) + 5 = 2Cbin(n/2) +5

caso 1 del teorema maestro:

a = 2, b = 2, f(n) = 5

f(n) ∈ Θ(n^c), c = 0 ya que f(n) ∈ Θ(5^0) = Θ(1)

entonces

c = 0 < log2(2) = 1

<Por el teorema maestro>

Cbin ∈ Θ(n^logb(a)) = Θ(n^log2(2)) = Θ(n^1) = Θ(n)

8)

fib vercion iterativa, complejidad: Θ(n)

fib vercion recursiva, complejidad: O(φ^n) (complejidad exponecial), doden φ = (1+√5)/2

Cfibr = O(φ^n), φ = (1+√5)/2

Probar por inducción:

Cfibr(n) ≥ 2^(n/2), para algun n ≥ n₀

Caso base: n₀ = 0

Cfibr(0) = 1 ≥ 2^(0/2) = 1

Caso inductivo:

H.I.: Cfibr(n) ≥ 2^(n/2), para algun n ≥ n₀

Tesis: Cfibr(n+1) = O(φ^(n+1)) ≥ 2^((n+1)/2), para algun n ≥ n₀

D/

Cfibr(n) ≥ 2^(n/2)

=<Def. Cfibr>

φ^n ≥ 2^(n/2)

< < aritmetica; φ^n < φ\*φ^n >

φ\*φ^n ≥ 2^(n/2)

=< aritmetica >

φ^(n+1) ≥ 2^(n/2)

>=< H.I. >

2^((n+1)/2) ≥ 2^(n/2)

=<aritmetica>

true

φ^(n+1) crese mucho mas rapido que 2^(n/2)